Chapter 5

القوانين المهمة في حل المسائل

- **The length of a vector قانون حساب طول المتجه**

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

تطبيق :

Find the length of v=(-1,3) in ?

Ans:

$\|v\| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2}$ = $\sqrt{1+9}$ = $\sqrt{10}$

- **Distance between two vectors قانون حساب مسافة المتجه بين متجهين**

-

The distance between two vectors u and v in R^n is

$$d(u,v) = \|u - v\|$$

تطبيق :

Find the distance between u=(0,2) and v=(2,0) ?

Ans:

$d(u,v) = \|u - v\| = \|(0-2),(2-0)\| = \|-2,2\|$

$= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

Dot product of vectors قانون ضرب القياسي للمتجهات

The dot product :

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

تطبيق :

Find the dot product of u=(1,2) and v=(0,3) ?

Ans:

$u \cdot v = (1 \times 0) + (2 \times 3\ )$

= 0 + 6 = 6

The angle between two vectors قانون حساب الزاوية بين متجهين

$$\cos\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\cdot\|\boldsymbol{v}\|}$$

تطبيق :

Find the angle between two vectors u=(2,1,0) and v=(0,3,4)?

$$\cos\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\cdot\|\boldsymbol{v}\|}$$

$$u\cdot v = (2\times 0) + (1\times 3\ ) + (0\times 4)$$

$$= 0 + 3 + 0 = 3$$

$$\|u\| = \sqrt{2^2+1^2+0^2} = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}$$

$$\|v\| = \sqrt{0^2+3^2+4^2} = \sqrt{0+9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\cos\boldsymbol{\theta} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}\sqrt{\mathbf{5}}}$$

Chapter 6

Inner product space

- خصائص Inner product space وهي : التي تساعد على حل المسائل وتطبيقها في الحل ..

1. $< u, v > = < v, u >$
2. $< u, v + w > = < u, v > + < u, w >$
3. $c < u, v > = < cu, v >$
4. $< v, v > \geq 0 \; and \; < v, v > = 0 \; if \; and \; only \; if \; v = 0$

تطبيق :

Show that the function defines an inner product on R^2, where $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ $< u, v > = u_1 v_1 + 2u_2 v_2$ satisfy the four inner products Axioms.

طريقة الحل حسب الخصائص :

1. Axiom $< u, v > = < v, u >$ ------ عملية إبداليه يعنى انك تضع u مكان v والعكس

$< u, v > = u_1 v_1 + 2u_2 v_2$

$= v_1 u_1 + 2v_2 u_2 = < v, u >$

2. Axiom $< u, v + w > = < u, v > + < u, w >$ ------ u تتوزع على v وكذلك w

Let $w = (w_1, w_2)$

$< u, v + w > = u_1(v_1 + w_1) + 2u_2(v_2 + w_2)$

$= u_1(v_1 + w_1) + 2u_2(v_2 + w_2)$ ------ فك الأقواس

$= \underline{u_1 v_1} + \underline{u_1 w_1} + 2\underline{u_2 v_2} + 2\underline{u_2 w_2}$ ------ نجمع الحدود المتشابهة حسب المعادلة المعطاة

$= (u_1 v_1 + 2u_2 v_2) + (u_1 w_1 + 2u_2 w_2)$

$= < u, v > + < u, w >$

3. Axiom $c < u, v > = < cu, v >$

$c < u, v > = c(u_1 v_1 + 2u_2 v_2)$

$= (cu_1) v_1 + 2(cu_2) v_2$

$= < cu, v >$

4.Axiom $< v, v \geq > 0$

$(v_1 \times v_1) + 2(v_2 \times v_2) \geq 0$

${v_1}^2 + 2{v_2}^2 \geq 0$

$$< v, v > = 0 \quad \Rightarrow \quad {v_1}^2 + 2\,{v_2}^2 = 0 \qquad \Rightarrow \; v_1 = v_2 = 0$$

Calculating the inner products $< u - 2v, 3u + 4v >$?

Ans :

$$< u - 2v, 3u + 4v > = < u, 3u + 4v > - < 2v, 3u + 4v >$$

$$= < u, 3u > + < u, 4v > - < 2v, 3u - 2v, 4v >$$

$$= 3 < u, u > +4 < u, v > -6 < v, u > -8 < v, v >$$

$$= 3\,\|u\|^2 - 2 < u, v > -8\,\|v\|^2$$